Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Análisis Funcional–Curso 2019

Segundo parcial

29 de noviembre de 2019

1. **(7 puntos)** Sean X e Y espacios de Banach y $T \in B(X,Y)$. Mostrar que existe $\alpha > 0$ tal que $\|Tx\| \geq \alpha\|x\| \, \forall x \in X$ sii $\ker T = 0$ y $T(X)$ es cerrado.

2. **(10 puntos)** En el espacio de Banach $\big(C([0,1]), \| \ \|_\infty\big)$ se considera el conjunto C formado por las funciones f que verifican

$$\int_0^{1/2} f - \int_{1/2}^1 f = 1.$$

Probar que C es un subconjunto convexo, cerrado y no vacío de $C([0,1])$ que no contiene elementos de norma mínima.

3. **(8 puntos)** Sean H un espacio de Hilbert y $T \in \mathsf{B}(H)$ una isometría parcial, es decir: $TT^*T = T$.

   a) Mostrar que T^* también es una isometría parcial.

   b) Probar que $P := T^*T$ y $Q := TT^*$ son proyecciones ortogonales.

   c) Sean P y Q como en *b*). Mostrar que $U : \operatorname{ran} P \to \operatorname{ran} Q$, tal que $Ux = Tx$ $\forall x \in \operatorname{ran} P$, es un operador unitario, mientras que $T|_{\ker P} = 0$.

4. **(25 puntos)** Sea $K : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ definido como:

$$Kf(t) = i\int_0^t f(s)ds - i\int_t^1 f(s)ds, \ \forall f \in L^2[0,1], \, t \in [0,1].$$

   a) Probar que K es compacto y autoadjunto.

   b) Hallar $\sigma_p(K) \setminus \{0\}$ (notar que $Kf(0) = -Kf(1)$, $\forall f$).

   c) Calcular $\|K\|$.